DÉNOMBREMENT

Deux semaines et demie

Table des matières

ECUE **2**

Motivation **2**

Attendus **2**

1 Cardinaux d'ensembles finis **3**
1.1 Résumé . . . 3
1.2 Exercices . . . 3
Exercice 1.1 . . . 3
Exercice 1.2 . . . 3
Exercice 1.3 . . . 4
Exercice 1.4 . . . 4
Exercice 1.5 . . . 4
Exercice 1.6 . . . 4

2 Compter et formaliser **4**
2.1 Résumé . . . 4
2.2 Exercices . . . 5
Exercice 2.7 . . . 5
Exercice 2.8 . . . 5
Exercice 2.9 . . . 5
Exercice 2.10 . . . 5
Exercice 2.11 . . . 6

3 Combinatoire **6**
3.1 Résumé . . . 6
3.2 Exercices . . . 6
★ Exercice 3.12 . . . 6
Exercice 3.13 . . . 6
Exercice 3.14 . . . 7
Exercice 3.15 . . . 7
Exercice 3.16 . . . 7
Exercice 3.17 . . . 7
Exercice 3.18 . . . 8

4 Dans votre pratique informatique **8**
4.1 Résumé . . . 8
4.2 Exercices . . . 8
Exercice 4.19 . . . 8
Exercice 4.20 . . . 9

ECUE

Cette feuille de TD fait partie de **l'ECUE DP** : dénombrement et probabilités.

Pré-requis : ECUE OBM (Outils de base mathématiques) fait en séminaire.

Motivation

« Compter » est une activité régulière de l'ingénieur informaticien : compter le nombre de ***bits*** que prend un entier donné pour être stocké en machine, compter le nombre d'opérations coûteuses lors de l'exécution d'un algorithme, compter le nombre de mots d'une longueur donnée que l'on peut construire à partir d'un alphabet fini, compter le nombre de composantes connexes d'un graphe, ou celui de points d'articulation ... etc. Cette activité est souvent liée au fait « d'estimer » ; il est parfois difficile d'avoir un décompte exact du nombre de réalisations d'un phénomène à l'étude, on se contente dans ce cas de le majorer ou le minorer suivant l'objectif à atteindre. L'aspect de l'estimation qui nous intéresse ici réside dans le fait de compter le nombre de réalisations du phénomène au pire ou au meilleur des cas [1]. Il est par exemple délicat de compter le nombre d'appels récursifs qu'on effectue lors de l'appel à une implémentation en *brute force* du calcul des nombres de Fibonacci. Encadrer ce nombre entre deux nombres qui dépendent du rang du terme à calculer est plus accessible. Il est également plus simple de majorer le nombre de divisions euclidiennes nécessaires lors du calcul du pgcd de deux nombres que de le calculer explicitement. Ce dernier point est en réalité difficile à expliciter.

Notre objectif par la suite va être de vous faire pratiquer le fait de ***compter***. Du point de vue mathématique celui-ci est exprimé par le fait d'***énumérer*** ; vous êtes renvoyés à votre cours sur ce point. Cette activité est par définition transverse, elle implique de mobiliser les habiletés que vous aurez assimilées à ce jour (ainsi que celles que l'on travaillera) pour répondre aux problèmes posés.

Les activités abordées par la suite vous seront d'une grande utilité afin d'aborder plus sereinement les calculs de complexité en algorithmique ainsi que pour étudier les premiers exemples de lois de probabilité finies.

Attendus

Voilà les AAV détaillés concernant cette feuille de TD.

On attend de vous de *formuler et effectuer des dénombrements d'ensembles finis s'identifiant à des arrangements, combinaisons, permutations.*

En particulier et en détails :

- Compter le nombres de façon de piocher des éléments dans un ensemble fini, avec ou sans remise, avec ou sans répétition.
- Compter le nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre.
- Adapter les méthodes de dénombrement à des situations issues de la vie courante.
- Développer un binôme à une puissance entière élevée.
- Démontrer d'un point de vue ensembliste et par le calcul la formule de Pascal.
- Démontrer d'un point de vue ensembliste la formule du binôme de Newton.
- Imaginer des expériences simples associées au cardinal d'un ensemble

Certains des attendus de ce cours sont transverses ; on souhaite que vous preniez à cœur de ***réfléchir*** : émettre des hypothèses, les tester, trouver des contre-exemples.

1. Pour opposer cela à l'estimation statistique.

1 Cardinaux d'ensembles finis

1.1 Résumé

Résoudre un problème de dénombrement revient à trouver le nombre d'éléments dans un ensemble donné. Les deux premières sections de ce TD se focalisent sur ce seul constat. On commencera donc par lister le comportement des cardinaux [2] d'ensemble par rapport aux opérations usuelles, que l'on pourra utiliser pour modéliser le système à résoudre, tandis que la seconde section présentera le processus de modélisation / formalisation en essayant d'extraire les idées abstraites importantes d'un sujet donné.

Cette section permet également une approche plus appliquée des résultats déjà étudiés sur les ensembles. Elle présente des relations entre les résultats et les concepts déjà introduits de manière plus tangible, pour lesquelles vous êtes invités à chercher des contre-exemples ou des ébauches de preuve à tâtons par une représentation schématique des ensembles et fonctions.

Vous remarquerez que certains exercices donnent plusieurs méthodes pour arriver au résultat : des méthodes de calcul direct et des méthodes de calcul par récurrence. Il est important de comprendre les avantages et les inconvénients de ces deux aspects [3]. Les méthodes directes (formules explicites) donnent un résultat exploitable, sur lequel on peut rechercher les informations voulues (ordre de grandeur, comparaisons), cependant elles s'obtiennent via des raisonnemments qui peuvent être difficiles à extraire d'un problème au premier abord. Elles donnent en quelque sorte une vision globale difficile à obtenir mais plus facile à utiliser. Les méthodes de calcul par récurrence expriment quant à elles l'évolution du décompte recherché par rapport à l'évolution de la taille du problème, mais le résultat n'est pas forcément exploitable directement : il faut ensuite en déduire une formule explicite qui conviendra à la relation de récurrence trouvée. C'est la vision locale du problème, celle que l'on obtient directement lorsqu'on comprend le fonctionnement mais qui nécessite de pousser le calcul plus loin pour pouvoir donner des résultats utilisables.

Si en mathématiques on va souvent privilégier la formule explicite qui quantifie totalement le problème, et donne le résultat recherché, ce n'est plus forcément le cas en informatique où une formule de récurrence calculera un résultat aussi bien [4] qu'une formule directe. Les outils algorithmiques à votre disposition (programmation dynamique, mémoïsation etc.) rendent cette alternative valable et même parfois préférable au calcul d'une formule générale.

1.2 Exercices

Exercice 1.1

Soit A (resp. B) l'ensemble des entiers naturels pairs (resp. multiples de 3) inférieurs ou égaux à 60.

— Écrire mathématiquement des deux ensembles.
— Quel est le cardinal de A ? Celui de B ?
— Que pouvez-vous dire du cardinal de $A \cap B$?
— Quel est le cardinal de $A \times B$? Celui de $A \cup B$?

Exercice 1.2

Travail personnel obligatoire : on note M (resp. A) la note de maths (resp. d'algo) en fin de $S1$ à l'EPITA. Toutes deux sont des notes sur 20, on suppose pour simplifier que ce sont des notes entières. Sous l'hypothèse où les deux matières ont même coefficient, un étudiant souhaite connaître le nombre de combinaisons de notes A, M qu'il peut avoir afin d'obtenir une note moyenne fixée $k \in \{0, \dots, 20\}$.

2. On rappelle les notations les plus communes pour le cardinal de A : $\mathrm{Card}(A)$, $|A|$, $\#(A)$ etc.
3. Nous y reviendrons en détail dans le chapitre sur les suites
4. Paradoxalement, vous rencontrerez plus tard des sujets pour lesquels il est plus rapide d'utiliser la relation de récurrence que la formule explicite, pour des raisons de complexité de calcul ; c'est par exemple le cas du calcul du déterminant d'une matrice. Afin de regrouper un résultat compliqué sous une formule simple on est parfois obligé de faire des compromis d'écriture qui se révèlent désastreux à l'analyse des opérations effectuées. Il est aussi parfois difficile d'exprimer clairement le résultat d'un algorithme récursif pourtant simple : chaque étape est bien définie et rapide mais on ne peut pas évaluer précisément et par une formule simple et générale l'impact total de leur succession, notamment quand on utilise des conditionnelles.

Comment pouvez-vous l'aider ?
Vous pouvez, par exemple, représenter la situation sous forme de tableau à double entrée.

Exercice 1.3

1. Soient E et F deux ensembles finis et disjoints. Que sait-on de $\text{Card}(E \cup F)$ dans ce cas ?
2. On s'intéresse, à présent, au cardinal de l'union de deux ensembles finis A et B, non nécessairement disjoints.
   (a) Représenter graphiquement l'union des deux ensembles A et B et partitionner cette union.
   (b) En déduire une expression de $\text{Card}(A \cup B)$ faisant apparaitre les cardinaux de A et B.

Exercice 1.4

On cherche à obtenir un résultat similaire à celui de l'exercice 1-3, mais pour une union de trois [5] ensembles finis.

Soient A, B et C trois ensembles finis. On cherche à déterminer le cardinal de $A \cup B \cup C$ en fonction des cardinaux des diverses intersections possibles de ces ensembles.

1. Représenter graphiquement $A \cup B \cup C$ et partitionner cette union.
   Proposer une formule donnant $\text{Card}(A \cup B \cup C)$.
2. Démontrer cette relation rigoureusement, en utilisant de manière récursive le résultat de l'exercice 1-3.
   Indices : $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$, ce qui donne l'attaque récursive. Supprimer ensuite toutes les unions à l'aide des opérations sur les ensembles et de la formule de l'exercice 1-3.

Exercice 1.5

On considère deux ensembles finis E et F de cardinaux respectifs n et p, que l'on pourra assimiler à $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, p]\!]$ sans perte de généralité.

1. On suppose qu'il existe une injection de E vers F. Quelle inégalité peut-on en déduire entre n et p ?
2. On suppose qu'il existe une surjection de E vers F. Quelle inégalité peut-on en déduire entre n et p ?
3. On suppose qu'il existe une bijection entre E et F. Quelle relation peut-on en déduire entre n et p ?

Exercice 1.6

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Proposer une méthode pour déterminer le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

2 Compter et formaliser

2.1 Résumé

Les problèmes de décompte auront souvent des énoncés très courts et elliptiques, dont il faudra savoir tirer les informations importantes par une modélisation adéquate. Les questions ne présenteront pas toujours la facette la plus simple du problème et il faudra souvent une nouvelle représentation du problème pour y répondre de manière efficace.

Chacun des raisonnements intuitifs que vous ferez plus tard prend racine dans des réflexes ou des problèmes de référence qu'il faut avoir assimilés. Un problème peut souvent se révéler n'être qu'une manière dissimulée de présenter une question connue ou pour laquelle on connaît des méthodes de

5. Il existe une formule générale pour donner le cardinal d'une union de n ensembles en fonction des cardinaux de leurs intersections, que l'on appelle formule du crible : $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{X \in \mathcal{P}([\![1,n]\!])} (-1)^{|X|+1} \left|\bigcap_{j \in X} A_j\right|$. Elle se démontre par récurrence, de la même manière que la première question de cet exercice dont c'est une généralisation.

résolution, il importe donc de savoir à quelle architecture, à quel phénomène connu le rattacher. Il est assez fréquent en informatique de raisonner en termes de « classes de problèmes » : ainsi, si l'on peut réduire un problème, c'est-à -dire le reformuler en un autre, on considère que ces problèmes sont équivalents et cachent deux manières de traiter le même comportement sous-jacent. On va donc utiliser des manières abstraites de décrire des énoncés donnés : à quel type de problème correspond un énoncé ? Et comment résout-on ce genre de problèmes ? C'est pour cela que nous allons commencer ici par travailler les passages liant la représentation abstraite à l'intuition.

2.2 Exercices

Exercice 2.7

1. On dispose d'un sac de n billes numérotées de 1 à n.
   — On tire successivement et avec remise k billes du sac ($1 \leq k \leq n$). Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   — On tire successivement et sans remise n billes du sac. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   — On tire successivement et sans remise k billes du sac ($1 \leq k \leq n$). Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   — On tire simultanément k billes du sac que l'on met dans un autre sac. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Soit E un ensemble à n éléments. Rappeler ce qu'est un arrangement de k ($k \leq n$) éléments de E, une combinaison de k éléments de E, ainsi qu'une permutation des n éléments de E.
   Combien y en a-t-il ?

Exercice 2.8

Dénombrer le nombre :

1. d'anagrammes du mot ***voiture***
2. d'anagrammes du mot ***saperlipopette***.
3. de façons de faire passer 5 étudiants de la classe un par un au tableau : c'est-à-dire de façons de choisir à la fois les 5 étudiants et leur ordre de passage.
4. de façons de faire passer tous les étudiants de la classe un par un au tableau.
5. de façons de faire passer tous les étudiants de la classe un par un au tableau, sachant que les deux qui dorment au fond de la classe vont être appelés deux fois.

Exercice 2.9

On cherche à sélectionner une équipe de foot : il y a 11 postes à pourvoir (gardien de but, arrière droit, avant-centre, etc.), donc 11 joueurs à sélectionner. Pour cela, on dispose d'un effectif de 24 joueurs disponibles.
Donner le nombre de sélections possibles dans les cas suivants :

1. Tous les joueurs peuvent jouer à tous les postes et la sélection spécifie uniquement qui sont les 11 joueurs sur le terrain, peu importe le poste que chacun occupe.
2. Tous les joueurs peuvent jouer à tous les postes. La sélection spécifie non seulement qui joue, mais aussi le poste de chacun.
3. Reprendre les deux questions précédentes si, parmi les 24 joueurs, 3 peuvent jouer uniquement gardien de but, les autres pouvant occuper tous les postes sauf gardien de but.

Exercice 2.10

Une association comporte 100 adhérents. On propose de créer un bureau parmi les adhérents, composé de :
— Un président
— Un trésorier
— Huit autres membres

Personne ne peut occuper simultanément deux postes dans le bureau.

1. Quel est le nombre de bureaux possibles ?
2. Même question si on demande une parité homme/femme. On suppose que les 100 adhérents sont 50 femmes et 50 hommes. S'il y a un président on veut une trésorière et inversement. Les huit autres membres doivent être 4 femmes et 4 hommes.

Exercice 2.11

On note k et n deux entiers naturels non nuls. Proposer des problèmes de dénombrement dont la réponse est donnée par les éléments listés ci-dessous. [6]

— 2^n
— $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
— $k.(n!)$

3 Combinatoire

3.1 Résumé

La combinatoire s'intéresse aux manières de ranger des ensembles ou des parties d'ensembles : permutations, arrangements, combinaisons ... Cela correspond à des problèmes souvent modélisés sous forme d'expériences aléatoires : tirages de cartes, tiercé etc. L'application de tous ces résultats aux probabilités finies est donc naturelle : sous l'hypothèse d'équiprobabilité [7], un problème de probabilités finies se résume à un problème de dénombrement des cas possibles et des cas favorables. On peut également être intéressé par des problèmes d'énumération exhaustive : combien d'arbres binaires vont vérifier telle ou telle propriété, combien y a-t-il de chemins dans un graphe ... Ceci peut donner une idée de la complexité de résolution par force brute (backtracking par exemple) de certains problèmes.

3.2 Exercices

★ **Exercice 3.12**

Dans cet exercice on s'intéresse au nombre de permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, c'est-à -dire de bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.

1. Combien y a-t-il de permutations de $[\![1, n]\!]$?
2. Montrer que la composée de deux permutations de $[\![1, n]\!]$ est encore une permutation de $[\![1, n]\!]$.
3. Soit f une permutation de $[\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe deux entiers naturels distincts p et q tels que $f^p = f^q$.
4. En déduire qu'il existe un entier $r > 0$ tel que $f^r = id_{[\![1,n]\!]}$.

Exercice 3.13

L'étagère spéciale révisions d'urgence d'un étudiant de l'EPITA contient 4 livres d'algo, 6 livres de maths et 3 livres de physique. Calculer le nombre d'ordres différents dans lesquels ils peuvent être rangés, sachant qu'ils sont groupés par matière.

6. $\binom{n}{k}$ se note aussi C_n^k (et pas C_k^n). Il faut absolument connaître les deux notations qui peuvent intervenir dans des exercices d'autres thèmes ou dans les QCM, contrôles...

7. Et même quand les tirages ne sont pas équiprobables, si l'on connaît leurs fréquences relatives cela revient au même.

Exercice 3.14

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

1. Comparer le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble à n éléments et le nombre de façons de choisir $n-k$ éléments dans un ensemble à n éléments. Qu'en pensez-vous ?
2. Dans une urne, il y a n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément k boules.
   (a) Quel est le nombre de tirages possibles ?
   (b) Quel est le nombre de tirages possibles contenant la boule numérotée 1 ?
   (c) Quel est le nombre de tirages possibles ne contenant pas la boule numérotée 1 ?
   (d) En déduire une relation entre $\binom{n}{k}$, $\binom{n-1}{k}$ et $\binom{n-1}{k-1}$.
   (e) Redémontrer cette relation par le calcul. Expliquer comment s'en servir pour calculer les coefficients binomiaux.

Exercice 3.15

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Proposer au moins deux manières de justifier la relation [8]

$$\forall n \in \mathbb{N}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

   Formaliser l'un au moins de vos arguments.

2. En utilisant la formule du binôme de Newton ci-dessus et le triangle de Pascal, écrire la forme développée de :

$$A = (x+y)^4 \qquad \text{et} \qquad B = (a-b)^5$$

3. Expliquer comment cette formule permet de démontrer par le calcul une égalité observée dans l'exercice 2-11.

Exercice 3.16

On considère la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

— Calculer la somme ci-dessus.
— Trouver un problème dont la réponse est donnée par la somme précédente.

Exercice 3.17

Un candidat du concours Advance est arrivé à l'école en vélo avec un cadenas possédant un code à 4 chiffres (0 à 9). L'examinateur de maths lui demande alors de :

1. a. Déterminer le nombre de codes possibles.
   b. Déterminer le nombre de codes possibles se terminant par un chiffre pair.
   c. Déterminer le nombre de codes possibles contenant au moins une fois le chiffre 2.
2. On suppose à présent que le code comporte 4 chiffres distincts.
   a. Déterminer le nombre de codes possibles.
   b. Déterminer le nombre de codes possibles se terminant par un chiffre pair.
   c. Déterminer le nombre de codes possibles comportant le chiffre 2.

8. appelée formule du binôme ou formule de Newton

Exercice 3.18

Travail personnel obligatoire : Pierre et Marie sont dans une classe de 20 élèves. Dans cette classe, il y a 12 garçons et 8 filles.

Les élèves de la classe doivent partir en week-end d'intégration. Pour cela, ils doivent créer un groupe de quatre responsables : un chef, un sous-chef et deux assistants (ces deux-là peuvent assister aussi bien le chef que le sous-chef). Personne ne peut occuper simultanément deux postes dans ce groupe.

1. Combien y a-t-il de groupes de responsables possibles ? Justifier brièvement.
2. On veut que le chef soit une fille, le sous-chef un garçon et parmi les deux assistants, on veut une fille et un garçon. Combien y a-t-il de groupes de responsables possibles dans ce cas là ? Justifier brièvement.
3. C'est décidé : Marie sera la chef du groupe. Combien y a-t-il de groupes de responsables possibles dans ce cas là ? Justifier brièvement.
4. « Si Marie est la chef alors je veux aussi faire parti du groupe des responsables ! » dit Pierre. Combien y a-t-il de groupes de responsables possibles dans ce cas là ? Justifier brièvement.

4 Dans votre pratique informatique

4.1 Résumé

La pratique algorithmique et la programmation regorgent de problèmes de dénombrement. On retrouve dans la suite quelques exemples classiques :

— estimation du nombre d'itérations dans une boucle ou de traitement sous condition au sein d'une boucle
— estimation du nombre de *bits* nécessaires au stockage d'un entier donné en base 10
— estimation de la taille des entrées d'un algorithme de tri de listes, du nombre de sorties possibles, de la proportion d'opérations attendues sur un sous-ensemble de listes
— manipulation de mots en théorie des langages.
— estimation du nombre de chemins possibles entre deux points d'un graphe.

Vous avez déjà eu à entrevoir certains de ces problèmes ; vous rencontrerez les autres au cours de votre scolarité. Vous pouvez interroger vos enseignants d'algorithmique et de programmation sur ces questions.

4.2 Exercices

Exercice 4.19

Soit $x \in \mathbb{N}$ et soit b un entier strictement plus grand que 1. On note $[x]_b$ la représentation en base b de l'entier x. On rappelle que la représentation en base b de x correspond à l'écriture (avec les abus de notation d'usage)

$$[x]_b = d_{k-1}d_{k-2}\cdots d_0$$

où

— pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$ on a $0 \leqslant d_i < b$ et $d_{k-1} \neq 0$;
— $x = \sum_{i=0}^{k-1} d_i b^i$.

1. Décomposer 173 en base 10 puis en base 2 en utilisant la formule ci-dessus.
2. On s'intéresse en un premier temps au cas $b = 2$.
   On note k le nombre de chiffres dans l'écriture de x en binaire (en base 2).
   — Encadrer x entre deux puissances de 2 successives.
   — En déduire une expression de k en fonction de x.
3. Généraliser le résultat précédent à toute base b.

Exercice 4.20

Travail personnel obligatoire : étant donné un ensemble fini E, une k-liste à valeurs dans E est un élément du produit cartésien E^k. Si $u \in E^k$ on note $u[i]$ pour $i \in [\![1, k]\!]$ la i-ème entrée de u.

On considère l'intervalle $I = [\![0, 4]\!]$.

On dit qu'une k-liste u à valeurs dans I est croissante (resp. strictement croissante) si pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $u[i] \leqslant u[i+1]$ (resp. $u[i] < u[i+1]$). Combien y a-t-il de

— 2-listes strictement croissantes ? croissantes ?
— 3-listes strictement croissantes ?
— 5-listes strictement croissantes ?
— 7-listes strictement croissantes ?